Sammanlagd mätosäkerhet – kvantitativa metoder

I denna PM redovisas beräkning av *sammanlagd mätosäkerhet* enligt GUM. Två kvantitativa metoder ingår i redovisningen: *numerisk derivering* och *Monte Carlo-simulering*. En viktig ingrediens i sammanhanget är ”medelfelets fortplantningslag”, eller som den benämns inom ramen för GUM: *Lagen om fortplantning av mätosäkerhet*.

Ett räkneexempel följer med genom hela beskrivningen.

Mätning

En *mätstorhet* uttrycks i ett *mätetal* och en *enhet*. Vid *mätning* bestäms mätetalet och vi får ett *mätresultat.*

Sambandet mellan mätstorheten Y (*utstorheten*) och *instorheterna* $X_1, X_2, X_3, ...$ kan skrivas (se figuren):

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, ...)$$

Vid mätningen skattas denna funktion av

$$y = f(x_1, x_2, x_3, ...)$$

där $y, x_1, x_2, x_3, ...$ är mätta eller beräknade storheter, i stället för de teoretiska som skrivs med versaler.

Sammanlagd mätosäkerhet

Den *sammanlagda standardosäkerheten* är i princip en tillämpning av lagen om fortplantning av mätosäkerhet på funktionen

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, ...)$$

Denna ”lag” lyder

$$u_c^2(y) = c_1^2 u^2(x_1) + c_2^2 u^2(x_2) + c_3^2 u^2(x_3) + ...$$

och de partiella derivatorna $c_i = \dfrac{\delta Y}{\delta X_i}$ benämns *känslighetsfaktorer*.

$u_c(y)$ är beteckningen för den sammanlagda standardosäkerheten, där *c* står för ”combined”.

Exempel: Följande fiktiva mätsystem föreligger:

$$Y = f(X_1, X_2, X_3) = X_1 * X_2 * X_3$$

med

$$X_1 \in N(10; 0,2) \rightarrow u(x_1) = 0,2$$

$$X_2 \in N(20; 0,4) \rightarrow u(x_2) = 0,4$$

$$X_3 \in R(30 \pm 1) \rightarrow u(x_3) = 1/\sqrt{3} \approx 0,577$$

där N betecknar normalfördelningen och R rektangelfördelningen. (Standardosäkerheten för en rektangelfördelning $\mu \pm a$ är $a/\sqrt{3}$.)

Beräkna den sammanlagda mätosäkerheten i mätningen $y = x_1 * x_2 * x_3$.

•

Känslighetsfaktorerna – de partiella derivatorna – ges av uttrycket

$$c_i = \left| \frac{\delta Y}{\delta X_i} \right| = \left| Y / X_i \right|$$

dvs.

$$c_1 = 6000/10 = 600$$

$$c_2 = 6000/20 = 300$$

$$c_3 = 6000/30 = 200$$

Mätresultatet blir $y = 10 * 20 * 30 = 6000$ och den sammanlagda mätosäkerheten

$$u_c(y) = \sqrt{(600 * 0,2)^2 + (300 * 0,4)^2 + (200 * 0,577)^2} \approx 205$$

Alltså: $y = 6000$ skattar Y med (den sammanlagda) standardosäkerheten $u_c(y) = 205$.

Numerisk derivering

Ibland kan beräkningen av de partiella derivatorna/känslighetsfaktorerna vara ganska komplicerad (och vem kommer fortfarande ihåg alla deriveringsregler?!). Då kan *numerisk derivering* förenkla kalkylen betydligt.

GUM förordar följande formler för detta

$$c_1 = \left| \frac{\delta Y}{\delta X_1} \right| \approx \left| \frac{f(x_1 + u(x_1), x_2, x_3, ...) - f(x_1 - u(x_1), x_2, x_3, ...)}{2u(x_1)} \right|$$

$$c_2 = \left| \frac{\delta Y}{\delta X_2} \right| \approx \left| \frac{f(x_1, x_2 + u(x_2), x_3, ...) - f(x_1, x_2 - u(x_2), x_3, ...)}{2u(x_2)} \right|$$

osv.

Exempel: Lös föregående uppgift m.h.a. numerisk derivering

•

Vi får

$$c_1 = ((10+0,2)*20*30-(10-0,2)*20*30)/(2*0,2) = (6120-5880)/0,4 = 600$$

$$c_2 = (10*(20+0,4)*30-10*(20-0,4)*30)/(2*0,4) = (6120-5880)/0,8 = 300$$

$$c_3 = (10*20*(30+0,577)-10*20*(30-0,577)/(2*0,577) = (6115,5-5884,5)/1,155 = 200$$

dvs. samma känslighetsfaktorer som vid beräkningen via partiella derivator. Därför blir naturligtvis även slutresultatet detsamma.

Monte Carlo-simulering

Det kan vara nog så knepigt att beräkna (den sammanlagda) standardosäkerheten. Än värre blir det om man vill tillämpa *utvidgad mätosäkerhet*. Fördelningen för Y blir ganska komplicerad redan i detta enkla fall. Då kan Monte Carlo-simulering vara en effektiv metod. Med den kan såväl standardosäkerheten som den utvidgade mätosäkerheten och dess täckningsfaktor beräknas – utan vare sig analytisk eller numerisk derivering.

Det går till på följande sätt:

- Dra ett slumptal x_i för varje instorhet, utifrån dess fördelning och specifika parametrar (väntevärde och standardosäkerhet).
- Beräkna utstorheten ur funktionen $y = f(x_1, x_2, x_3, ...)$.
- Upprepa detta ett stort antal gånger och bygg successivt upp utstorhetens statistiska fördelning.
- Beräkna väntevärde, standardosäkerhet, önskad täckningsfaktor och utvidgad mätosäkerhet etc. ur den empiriska fördelningen.

För detta finns speciell programvara, men man kan komma ganska långt med Excel också.

Exempel: Beräkna utvidgad mätosäkerhet på konfidensnivån 95% för $y = x_1 * x_2 * x_3$. Tillämpa Monte Carlo-simulering.

•

För beräkningen användes programvaran @RISK[1]. 50.000 ”sample runs” i fem omgångar (10.000 i varje) gjordes med de givna förutsättningarna beträffande instorheternas statistiska egenskaper. Det bekräftade $\bar{y} = 6000$ och gav dessutom $u(y) = 205$ och $k_{95} = 1,95$.

Det ger den utvidgade mätosäkerheten

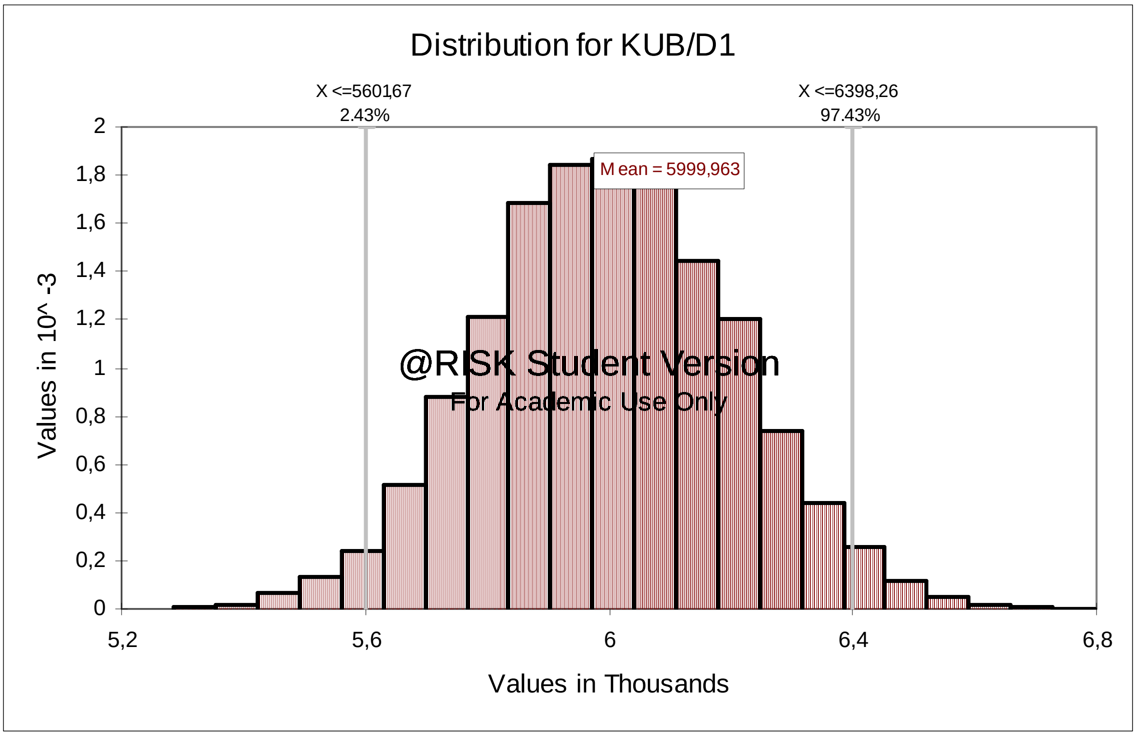
$$U_{95}(y) = k_{95} * u(y) = 1,95 * 205 = 400$$

dvs.

$$P\{Y \in 6000 \pm 400\} = P\{Y \in [5600, 6400]\} = 95\%$$

I nedanstående figur redovisas den empiriska fördelningen för en av de fem beräkningsomgångarna grafiskt.

[1] Kontakta författaren för närmare information



Simuleringen tog ca. 20 minuter, från första inmatningen till färdigt resultat. Att lära sig programvaran – som är inbäddad i Excel och har en snarlik logik – tar kanske en timme. Genom denna ”kompetensinvestering” kan man tjäna mycket tid vid löpande analyser. Vidare blir resultaten tillförlitligare och grafiskt redovisade.

GUM rekommenderar denna metodik, men det stöd som ges är främst inriktat mot att användaren själv ska utveckla simuleringsprogramvaran.

Kommentar: OBS att det inte bara är vid beräkning av utvidgad mätosäkerhet som Monte Carlo-metoder kan användas. Även om beräkningen endast avser sammanlagd mätosäkerhet – den direkta tillämpningen av lagen om fortplantning av mätosäkerhet – så underlättas arbetet. Då är inte heller valet av fördelning för instorheterna kritiskt, så länge den antagna standardosäkerheten är OK.

Slutord

Författarens rekommendation är att huvudsakligen använda kvantitativa metoder vid GUM-analyser. Därigenom blir merarbetet för att uppskatta mätosäkerheten inte särskilt betungande – och ambitionen att alltid komplettera ett mätresultat med en sådan kvalitetsuppgift ter sig helt realistiskt.

/Clas-Göran Persson